Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Correction de l'Interro n^o 2

Exercice 1 :

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de M. Pour cela, on peut calculer $\det(M - XI)$ ou $\det(XI - M)$, ce qui donne le même résultat au signe près. Je prends la première solution :

$$\begin{aligned}
P_M(X) = \det(M - XI) &= \begin{vmatrix} -2-X & 4 & -9 \\ 3 & -1-X & 3 \\ 2 & -2 & 5-X \end{vmatrix} \\
&= (-2-X)\begin{vmatrix} -1-X & 3 \\ -2 & 5-X \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ -2 & 5-X \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ -1-X & 3 \end{vmatrix} \\
&\text{(On a développé par rapport à la première colonne)} \\
&= -(2+X)(-(1+X)(5-X)+6) - 3(4(5-X)-18) + 2(12-9(1+X)) \\
&= -(2+X)(-(5+4X-X^2)+6) - 3(2-4X) + 2(3-9X) \\
&= -(2+X)(X^2-4X+1) - 6 + 12X + 6 - 18X \\
&= -(X^3 - 2X^2 - 7X + 2) - 6X \\
&= -X^3 + 2X^2 + X - 2
\end{aligned}$$

On remarque que 1 est une racine de P_M, on obtient alors $P_M(X) = -(X-1)(X^2 - X - 2) = -(X-1)(X+1)(X-2)$. La polynôme caractéristique de M est donc scindé à racines simples, on sait donc qu'il est diagonalisable et que la dimension de chacun des espaces propres sera 1. Pour calculer E_λ, l'espace propre associé à λ, il faut calculer le noyau de $M - \lambda I$. On trouve $E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{-1} = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Le calcul du polynôme caractéristique donne $P_N(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ (ici j'ai calculé $\det(XI - N)$). On constate que 1 est racine, et on obtient $P_N(X) = (X-1)^2(X-2)$. Comme 1 est racine double, pour que N soit diagonalisable, il faut que la dimension de E_1, l'espace propre associé à 1 soit de dimension 2. Mais lorsqu'on calcule $E_1 = \ker(N - I)$, on trouve que $E_1 = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix})$ est de dimension 1 donc N n'est pas diagonalisable. Il n'est donc pas utile de le calculer, mais pour information, $E_2 = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

Exercice 2 :

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -8 & 12 \end{pmatrix}$

2.

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2+7x_2^2+12x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-16x_2x_3 \\ &= (x_1+2x_2-x_3)^2+3x_2^2+11x_3^2-12x_2x_3 \\ &= (x_1+2x_2-x_3)^2+3(x_2-2x_3)^2-x_3^2 \\ &= y_1^2+3y_2-y_3^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{array}{rcrr} y_1 = & x_1 & +2x_2 & -x_3 \\ y_2 = & & x_2 & -2x_3 \\ y_3 = & & & x_3 \end{array}$$

En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cela donne $Y = QX$. En identifiant les coefficients, on obtient $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où α doit vérifier $\alpha + 4 - 1 = 0$ (on a identifié le coefficient en haut à droite, qui doit être 0, dans le produit $Q.Q^{-1}$). Donc $\alpha = -3$ et finalement $P = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $X = PY$. P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

D'après ce qui a été fait précédemment, $\mathcal{B}$ est alors une base orthogonale pour q, et $Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Rappelons, même si cela n'est pas utile ici, que cette matrice doit être égale à ${}^tPMP$ d'après la formule de changement de base pour les formes quadratiques.

3. La signature de q est donc $(2, 1)$.
4. Si Y sont les coordonnées d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$, on a donc $q(v) = y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$. En prenant $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on obtient donc des vecteurs x tels que $q(x) = -1$.

   L'exemple $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ correspond au vecteur de $\mathbb{R}^3$, $x = 0.e_1 + 0._2 + 1.e_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est bien un élément de $\mathbb{Z}^3$ (la raison pour laquelle ça marche, c'est que les éléments de $\mathcal{B}$ sont dans $\mathbb{Z}^3$). On vérifie en effet que $q(x) = (-3)^2 + 7.(2)^2 + 12 + 4.(-3).2 - 2.(-3).1 - 16.2.1 = 9 + 28 + 12 - 24 + 6 - 32 = 55 - 56 = -1$.

   L'autre exemple $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ correspond au vecteur $x = e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, qui est aussi bien dans $\mathbb{Z}^3$ et qui doit donc aussi vérifier $q(x) = -1$.

Exercice 3 :

Déjà, $M = Mat_{\mathcal{B}_{can}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, comme dans q il n'y a pas de termes carrés, on en fait apparaître en faisant le changement de variable

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & y_1 & +y_2 & \\ x_2 & = & y_1 & -y_2 & \\ x_3 & = & & & y_3 \end{array}$$

qui équivaut à

$$\begin{array}{ll} y_1 & = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_2 & = \frac{x_1-x_2}{2} \\ y_3 & = x_3 \end{array}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} q(x) &= (y_1+y_2)(y_1-y_2) - 2(y_1+y_2)y_3 + 4(y_1-y_2)y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 - 6y_1y_3 \\ &= (y_1+y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 - 6y_2y_3 \\ &= (y_1+y_3)^2 - (y_2+3y_3)^2 + 8y_3^2 \\ &= z_1^2 - z_2^2 + 8z_3^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{array}{ccccc} z_1 & = & y_1+y_3 & = & \frac{x_1+x_2}{2} + x_3 \\ z_2 & = & y_2+3y_3 & = & \frac{x_1-x_2}{2} + 3x_3 \\ z_3 & = & y_3 & = & x_3 \end{array}$$

Soit $Z = QX$ où

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut directement caluler $P = Q^{-1}$ avec le pivot de Gauss et on trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est donc la matrice qui vérifie $X = PZ$.

On peut aussi faire nos changements de variable *à l'envers*, et exrpimer X en fonction de Z. On montre d'abord facilement que

$$\begin{array}{ccc} y_1 & = & z_1 - z_3 \\ y_2 & = & z_2 - 3z_3 \\ y_3 & = & z_3 \end{array}$$

puis comme on avait déjà calculé X en fonction de Y on obtient finalement :

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & = & y_1+y_2 & = & z_1+z_2-4z_3 \\ x_2 & = & y_1-y_2 & = & z_1-z_2+2z_3 \\ x_3 & = & y_3 & = & z_3 \end{array}$$

soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z$ qui nous redonne (heureusement) la même valeur de P. Ainsi ${}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

1. En effet si $\varphi(P,Q) = \frac{P(1)Q(-1)+P(-1)Q(1)}{2}$, alors $q(P) = \varphi(P,P)$, et on peut en effet vérifier que φ est bien une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut le voir en utilisant l'expression de φ obtenue à la question précédente, ou directement en utilisant la définition de q : $q(x_1 1 + x_2X + x_3X^2) = (x_1+x_2+x_3)(x_1-x_2+x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$.

3. Donc dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, $q(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$.
A partir de là, on diagonalise cette forme quadratique, et le calcul est très simple :

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

Et là c'est fini, mais il faut bien faire attention que la forme quadratique est dégénérée. On pose le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_3 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}$$

C'est bien un changement de variables, qui s'écrit $Y = QX$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice inversible. Ainsi dans la base $\mathcal{B}$ qui correspond à Q^{-1} (qu'on n'a pas besoin de calculer) la matrice de q est diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la signature de q est donc $(1, 1)$.

4. Comme $(X - 1) + (X + 1) = 2$, $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \supset \{1, X - 1, X^2 - 1\}$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est génératrice, donc une base puisqu'elle contient autant d'éléments que la dimension de $\mathbb{R}^2[X]$.
5. Notons a, b, c les coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors $q(a(X-1)+b(X+1)+c(X^2-1)) = (2b)(-2a) = -4ab$.
Ainsi la matrice de q dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 :
Déjà, $\dim(F) = 2 = 3-1$ (c'est le noyau d'une forme linéaire si on veut employer des mots compliqués). On en choisit une base, par exemple $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\} = \{e_1, e_2\}$. Alors

$$q_{|F}(x_1e_1 + x_2e_2) = q(\ (x_1 + x_2, -x_1, -x_2)\ ) = (x_1 + x_2)^2 + 3(-x_1)^2 - 8(-x_2)^2 = 4x_1^2 - 7x_2^2 + 2x_1x_2.$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_{|F}) = M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$.
On sait que dans une certaine base (pour laquelle on note P la matrice de changement de base) la matrice de q est diagonale, de la forme ${}^tPMP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Alors $ab = \det({}^tPMP) = \det(P)^2 \det(M) < 0$ car $\det(M) = -29$ et $\det(P)^2 > 0$. Ainsi, $ab < 0$ et cela signifie que quitte à échanger a et b on aura $a < 0$ et $b > 0$, donc la signature de $q_{|F}$ est $(1, 1)$. Bien, sûr, on aurait aussi pu chercher à diagonaliser $q_{|F}$.

Exercice 6 :

1. La signature (s, t) doit vérifier $s + t \leq 3$ avec égalité si la forme est non dégénérée.
Déjà, si la forme est dégénérée, alors par définition, on peut trouver $x \in N(q) \setminus \{0\}$, et alors $q(x) = 0$.
Si q est non-dégénérée, si sa signature est $(2, 1)$, alors quitte à faire un changement de base, on peut supposer que $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, et alors $q(1, 0, 1) = 0$, avec $(1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. De même, si q est de signature $(1, 2)$, on peut trouver $x \neq 0$ tel que $q(x) = 0$.
Finalement, si q est de signature $(3, 0)$, alors q est un produit scalaire car elle est définie positive : en effet, quitte à faire un changement de base, on peut supposer que $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, et donc si $v \neq 0$, $q(v) > 0$. De même, si q est de signature $(0, 3)$, q est définie négaitve, i.e. $\forall v \neq 0$, $q(v) < 0$.
Ainsi il existe $x \neq 0$ tel que $q(x) = 0$ si et seulement si la signature de q est différente de $(3, 0)$ et $(0, 3)$.

2. D'après un théorème du cours, il existe des complexes $a_1, \ldots, a_n$ et une base de $\mathbb{C}^n$ tels que q s'écrive $q(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$. Si $a_1 \neq 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $a_1\alpha^2 + a_2 = 0$ (ici on utilise d'une certaine manière le théorème de D'Alembert-Gauss, qui dit que tout polynôme complexe admet une racine copmplexe). Alors $q(\alpha, 1, 0, \ldots, 0) = a_1\alpha^2 + a_2 = 0$.